Groupe A

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

AVERTISSEMENT GÉNÉRAL : *Il sera accordé une grande importance au soin apporté par les candidats à la rédaction de leur copie.*

NOTATIONS GÉNÉRALES : On note comme d'habitude $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers rationnels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

Soit $n > 1$ un entier. La notation $a \equiv b \bmod . n$, où a et b sont deux entiers rationnels, signifie que le nombre $(a - b)/n$ est entier. Pour tout a dans $\mathbb{Z}$, on note $[a]$ l'ensemble des entiers b dans $\mathbb{Z}$ tels que $b \equiv a \bmod . n$; on note $\mathbb{Z}/n$ l'ensemble des classes d'équivalence $[a]$. Il existe sur $\mathbb{Z}/n$ une addition et une multiplication caractérisées par $[a] + [b] = [a + b]$ et $[a].[b] = [a.b]$. L'ensemble $\mathbb{Z}/n$ est alors un anneau commutatif ayant les n éléments $[0], [1], \ldots, [n - 1]$.

I

On note V un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{C}$. On dit qu'une application linéaire T de V dans V est *diagonalisable* s'il existe une base de V formée de vecteurs propres de T; on dit que deux applications linéaires T et T′ de V dans V *commutent* si l'on a $TT' = T'T$.

Soient $T_1, \ldots, T_m$ des applications linéaires de V dans V; on suppose que chacune des T_i est diagonalisable et que T_i commute à T_j quels que soient i et j. On note **A** l'ensemble des applications linéaires de V dans V qui commutent à chacune des T_i.

1° Soit T une application linéaire diagonalisable de V dans V. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels V′ de V *stables* par T (c'est-à-dire tels que T transforme tout élément de V′ en un élément de V′). Montrer que pour un tel sous-espace V′ de V, il existe une base de V′ formée de vecteurs propres de T.

2° Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V telle que e_i soit un vecteur propre de T_j quels que soient i compris entre 1 et n et j compris entre 1 et m. Une telle base est-elle unique?

3° Déterminer l'ensemble **A** au moyen d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V ayant la propriété énoncée en 2° ci-dessus.

4° Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a. Deux éléments quelconques de **A** commutent.

b. Quels que soient les nombres complexes $c_1, \ldots, c_m$, l'ensemble des vecteurs $x \in V$ tels que $T_j x = c_j x$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$ est un espace vectoriel de dimension 0 ou 1.

II

On note n un entier au moins égal à 1 et V_n l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ formé des applications f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $f(a + n) = f(a)$ pour tout a dans $\mathbb{Z}$; les opérations vectorielles sont définies de la manière usuelle :

$$(1) \qquad (f+g)(a) = f(a) + g(a)\ ,\ (c.f)(a) = c.f(a)$$

pour f, g dans V_n, a dans $\mathbb{Z}$ et c dans $\mathbb{C}$.

1° Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de l'application linéaire E de V_n dans V_n définie par $(Ef)(a) = f(a + 1)$ pour $f \in V_n$ et $a \in \mathbb{Z}$. En déduire que toute fonction $f \in V_n$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$(2) \qquad f(a) = \sum_r c(r).r^a, \quad (c(r) \in \mathbb{C}),$$

où r parcourt l'ensemble des nombres complexes tels que $r^n = 1$.

2° Introduisons dans V_n un produit scalaire hermitien par

$$(f \mid g) = \frac{1}{n} \sum_{a=0}^{n-1} \overline{f(a)}.g(a).$$

Démontrer que l'on a $(Ef \mid Eg) = (f \mid g)$ pour f, g dans V_n ; conséquences pour les vecteurs propres et valeurs propres de E ? En déduire une méthode de calcul des coefficients $c(r)$ dans la formule (2).

3° Montrer que toute application linéaire A de V_n dans V_n qui commute à E est combinaison linéaire de $1, E, \ldots, E^{n-1}$ à coefficients complexes. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels W de V_n stables par E.

.../...

E.N.S. ULM & SEVRES 1978

4° Construire une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de l'espace vectoriel V_n qui soit permutée circulairement par E. Du calcul des valeurs propres de E fait ci-dessus, déduire la valeur de la signature d'une permutation circulaire de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

5° Examiner le cas de l'espace vectoriel V_n^- formé des fonctions f telles que $f(a+n) = -f(a)$ et d'une application linéaire E de V_n^- dans V_n^- définie comme ci-dessus. Comment les résultats précédents s'étendent-ils?

III

N. B. — *Seul le résultat de la question* III.3° *sera utilisé dans les parties ultérieures. On pourra l'admettre.*

Soit p un nombre premier différent de 2, et soit $q = p - 1$. On rappelle que $F = \mathbb{Z}/p$ est un corps commutatif à p éléments; l'ensemble $F^\times$ des éléments non nuls de F est donc un groupe commutatif pour la multiplication. Pour tout diviseur d du nombre q, on note M_d l'ensemble des éléments x de $F^\times$ tels que $x^d = 1$. Ces notations seront conservées dans toute la suite.

1° Montrer que, dans l'anneau F[X] des polynômes à coefficients dans F en une indéterminée X, on a :

$$X^p - X = \prod_{i=0}^{p-1} (X - [i]).$$

En déduire que le polynôme $X^d - 1$ a d racines distinctes dans le corps F, pour tout diviseur d de q.

2° Soit d un diviseur de q. Montrer que l'application $x \longmapsto x^d$ est un homomorphisme du groupe $F^\times$ dans lui-même, de noyau M_d et d'image $M_{q/d}$.

3° Soient $p_1, \ldots, p_h$ les diviseurs premiers distincts de l'entier q. Montrer que le nombre des éléments de $F^\times = M_q$ qui n'appartiennent à aucun des sous-groupes $M_{q/p_1}, \ldots, M_{q/p_h}$ est égal à $q\,(1 - p_1^{-1}) \ldots (1 - p_h^{-1})$. Si g est l'un de ces éléments, le groupe $F^\times$ se compose des puissances g^i pour $0 \leqslant i < q$.

IV

On appelle *caractère* toute fonction χ à valeurs complexes non nulles, définie sur $F^\times$ et telle que $\chi(ab) = \chi(a).\chi(b)$ pour a, b dans $F^\times$. Si a est un entier non divisible par p, on écrira simplement $\chi(a)$ pour $\chi([a])$. On note 1 le caractère dont toutes les valeurs sont égales à 1.

1° Montrer qu'il existe un caractère χ_0 tel que l'ensemble des caractères se compose des puissances $(\chi_0)^i$ pour $0 \leqslant i < q$. En particulier, on a $(\chi_0)^0 = 1$.

2° Il existe un unique caractère ε différent de 1 tel que $\varepsilon^2 = 1$; c'est aussi l'unique caractère dont le noyau soit égal à $M_{q/2}$. Le nombre $\varepsilon(a)$ s'appelle le « symbole de Legendre », noté $\left(\frac{a}{p}\right)$.

3° Un caractère χ est dit *pair* ou *impair* selon que l'on a $\chi(-1) = 1$ ou $\chi(-1) = -1$. Déterminer le nombre des caractères pairs et le nombre des caractères impairs.

V

On note W l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ formé des applications de $F^\times$ dans $\mathbb{C}$, les opérations vectorielles étant définies comme dans II (formule (1)). Pour tout $a \in F^\times$, on définit l'application linéaire T_a de W dans W par $(T_a f)(x) = f(ax)$ pour $f \in W$ et $x \in F^\times$.

1° Construire une base de W formée d'éléments de W qui sont vecteurs propres pour chacune des applications linéaires T_a.

2° Introduisons dans W un produit scalaire hermitien par

$$(f \mid g) = \frac{1}{q} \sum_x \overline{f(x)}.g(x)$$

(sommation étendue aux éléments x de $F^\times$). Montrer que l'on a $(\chi \mid \chi') = 0$ si χ et χ' sont deux caractères distincts (on pourra remarquer que l'on a $(T_a f \mid T_a g) = (f \mid g)$ pour f, g dans W et a dans $F^\times$ et utiliser le résultat de la question 1°).

3° Déterminer l'ensemble des applications linéaires de W dans lui-même qui commutent à chacune des T_a, et l'ensemble des sous-espaces vectoriels W′ de W stables par chacune des T_a.

4° Construire une base $(\delta_a)_{a \in F^\times}$ de l'espace vectoriel W telle que $T_a \delta_b = \delta_{ab}$ pour a, b dans $F^\times$. Utilisant les résultats de la question 1°, en déduire que les nombres suivants sont égaux :

— le déterminant de T_a

— la signature de la permutation de l'ensemble fini $F^\times$ donnée par $x \longmapsto ax$

— le produit $\prod_\chi \chi(a)$ étendu à tous les caractères χ

— le symbole de Legendre $\varepsilon(a)$.

.../...

VI

On note U l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ formé des applications de F dans $\mathbb{C}$. Si r est un nombre complexe tel que $r^p = 1$, on définit une application linéaire Φ_r de U dans lui-même par

$$(3) \qquad (\Phi_r f)([a]) = p^{-1/2} \sum_{b=0}^{p-1} r^{ab} . f([b])$$

pour $f \in U$ et tout entier rationnel a. Si χ est un caractère, on définit la « somme de Gauss »

$$(4) \qquad g(\chi, r) = p^{-1/2} \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a) . r^a.$$

1° Supposons d'abord qu'on ait $r \neq 1$ et $\chi \neq 1$. Établir les formules

$$(5) \qquad g(\chi, r^b) = \chi(b)^{-1} . g(\chi, r)$$

$$(6) \qquad g(\chi, r) . g(\chi^{-1}, r) = \chi(-1)$$

pour tout entier b non divisible par p. En déduire que $g(\chi, r)$ est un nombre complexe de module 1.

2° Examiner les cas particuliers où $r = 1$ ou $\chi = 1$.

3° Fixons $r \neq 1$. Montrer que les trois familles suivantes de vecteurs de U sont des bases, et déterminer la matrice de l'application linéaire Φ_r dans chacune de ces bases :

a. Pour tout $a \in F$, on note δ_a la fonction définie par $\delta_a(a) = 1$ et $\delta_a(b) = 0$ lorsque $a \neq b$;

b. Pour tout entier i compris entre 0 et $p - 1$, on pose $\psi_{i,r}([a]) = r^{ia}$ pour tout entier rationnel a;

c. Pour tout caractère $\chi \neq 1$, on note $\hat{\chi}$ la fonction sur F qui s'annule en 0 et qui coïncide avec χ sur $F^\times$; la fonction δ_0 a été définie plus haut, et u est la fonction constante égale à 1 sur F. La famille considérée est $\{\delta_0, u, \hat{\chi} \ldots\}$.

4° Montrer que l'on a $(\Phi_r \Phi_r f)(a) = f(-a)$ pour $f \in U$ et $a \in F$. Retrouver la formule (6) par application des calculs faits en 3°.

5° Calculer le déterminant de Φ_r dans chacune des trois bases de U introduites ci-dessus. On en déduira la formule

$$(7) \qquad \prod_{0 \leq j < j' < p} (r^j - r^{j'}) = g(\varepsilon, r) . (-1)^h p^{p/2}$$

où l'entier h est égal à $(p-1)/4$ si $p \equiv 1 \bmod 4$ et à $(p-3)/4$ si $p \equiv 3 \bmod 4$.

Prouver ensuite que l'on a (i est l'unité imaginaire, $i^2 = -1$) :

$$(8) \qquad g(\varepsilon, r) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv 1 \bmod 4 \\ i & \text{si } p \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$$

(« théorème de Gauss ») lorsque l'on prend r égal à $\cos(2\pi/p) + i \sin(2\pi/p)$.

VII

On se propose d'établir la « loi de réciprocité quadratique »

$$(9) \qquad \left(\frac{l}{p}\right)\left(\frac{p}{l}\right) = (-1)^{(l-1)(p-1)/4}$$

où l, p sont deux nombres premiers, distincts entre eux et distincts de 2. On pourra démontrer successivement les formules suivantes, où r est un nombre complexe tel que $r \neq 1$ et $r^p = 1$, et où a est un entier rationnel non divisible par p.

$$(10) \qquad \left(\frac{a}{p}\right) = \prod_{0 \leq j < j' < p} (r^{aj} - r^{aj'}) / (r^j - r^{j'})$$

$$(11) \qquad \left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \bmod p$$

$$(12) \qquad \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \prod_{j=1}^{(p-1)/2} f(j) = \prod_{j=1}^{(p-1)/2} f(aj)$$

$$(13) \qquad \left(\frac{a}{p}\right) = \prod_{j=1}^{(p-1)/2} (r^{aj} - r^{-aj}) / (r^j - r^{-j})$$

$$(14) \qquad \left(\frac{a}{p}\right) = \prod_{m=1}^{(p-1)/2} \prod_{n=1}^{(a-1)/2} 4 [\sin^2(2\pi n/a) - \sin^2(2\pi m/p)].$$

Dans la formule (12), on suppose que f est une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ telle que l'on ait $f(p+j) = f(j) = -f(-j)$ pour tout entier $j \in \mathbb{Z}$; dans la formule (14), il faut supposer que l'entier a est positif et impair.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail